

## Integrazione per successioni

**Esercizio 1.** Calcolare i seguenti limiti giustificando il procedimento seguito:

$$1. \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \int_{E_k} \frac{\sin(x/k)}{x^3 \sqrt{x}} dx, \quad E_k = [k^{-1}, +\infty).$$

$$2. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{k \arctan\left(\frac{x^3}{k^3}\right)}{x^2(x+2)} dx$$

$$3. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} \frac{\tanh(\sqrt{x}/k)}{x^2 \sqrt{(k+1)x}} dx, \quad E_k = [k^{-2}, +\infty).$$

$$4. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} \frac{\arctan(\sqrt[4]{x}/k)}{x^2 \sqrt{x(1+\sqrt{k})}} dx, \quad E_k = [k^{-1}, 3],$$

$$5. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} \frac{\arctan(\sqrt[4]{x}/k)}{x^2 \sqrt{x(1+\sqrt{k})}} dx, \quad E_k = [k^{-1}, +\infty),$$

$$6. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} \frac{\log\left(1 + \frac{2x}{k}\right)}{x^3 \sqrt{x+k}} dx, \quad E_k = [k^{-3/2}, +\infty),$$

$$7. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E \frac{1+x^k}{1+x^{k+2}} dx, \quad E = (0, +\infty),$$

$$8. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E \frac{1-3x^k}{1+4x^{k-1}e^{x-1}} dx, \quad E = (0, +\infty),$$

$$9. \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 k \sin(x^k) dx.$$

R. 1) 0; 2) 0; 3)  $+\infty$ ; 4)  $4/5$ ; 5)  $4/5$ ; 6) 0; 7) 2; 8)  $-1/2$ ; 9)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Esercizio 2.** Sia

$$f_n(x) = \frac{\pi/2 - \arctan(nx)}{1+x}.$$

(a) Stabilire se ogni funzione  $f_n$  è sommabile su  $(0, +\infty)$ .

(b) Stabilire se vale la relazione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

R. a) Ogni  $f_n$  è sommabile su  $(0, +\infty)$ . b) La relazione vale.

**Esercizio 3.** Sia data la successione

$$L_n = \int_{1/n}^{+\infty} \frac{n^\alpha x^2 e^{-nx}}{1+3x} dx \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \text{ con } \alpha \in (0, +\infty).$$

Stabilire per quali valori del parametro  $\alpha$  esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = L \in [-\infty, +\infty]$$

e, per tali valori di  $\alpha$ , trovare il limite  $L$ .

R.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 0$  se  $\alpha < 3$ ,  $5/e$  se  $\alpha = 3$  e  $+\infty$  se  $\alpha > 3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $(f_n)_{n=1}^{+\infty}$  la successione di funzioni definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \log(1+x^n) & x \in [0, 1) \\ e^{-x^2/n} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

- (a) verificare che  $f_n(x)$  converge puntualmente in  $[0, +\infty)$  e trovare la funzione limite.
- (b) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) dx.$$

R. a) La funzione limite  $f(x) = 0$  per  $x \in [0, 1)$  e  $f(x) = 1$  per  $x \in [1, +\infty)$ . b)  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \log 2 - 1$ ,  $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx = +\infty$ .