Cognome **Nome** **Matr**

ANALISI MATEMATICA 2 - **PROVA SCRITTA #3**

(l.tr. in Matematica - prof. M.Vignati) 13 settembre 2019 vers.A

☐**Acconsento**/☐**Non acconsento** alla pubblicazione online dell'esito di questa prova scritta.

Firma: ....

1A] *(7 p.ti)*

i) Determinare il polinomio di Taylor $T_2 f$, di ordine 2 e centro $\mathbf{a} = (1, -1, 4)$, della funzione $f : \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y, z) = x^2 y + xz - y^2 \sqrt{z}$$

ii) Sia $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, con $\mathbf{g}'(1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, e sia $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \mathbf{g} \circ f$.

Calcolare $\dfrac{\partial h_1}{\partial z}(\mathbf{a})$.

2A] *(8 p.ti)* L'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso e limitato e, per ogni funzione $f : E \to \mathbb{R}$ continua in E, vale

$$\iint_E f = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1}^{-\sqrt{-y}} f(x, y)\, dx \right) dy \; + \; \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{-y}}^{1+y^2} f(x, y)\, dx \right) dy \; + \\ + \int_{0}^{1} \left(\int_{-1}^{1+y^2} f(x, y)\, dx \right) dy \; + \; \int_{1}^{2} \left(\int_{-1}^{2} f(x, y)\, dx \right) dy$$

i) Invertire l'ordine di integrazione e scrivere $\iint_E f$ come somma di un numero finito di integrali iterati della forma

$$\int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{\alpha_k(x)}^{\beta_k(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k, \beta_k : [a_k b_k] \to \mathbb{R}$ continue.

ii) Calcolare $\iint_E f$ quando $f(x, y) = xy$.

Suggerimenti: i) può essere utile disegnare l'insieme E;

ii) tenere conto delle simmetrie di E ed f.

3A] *(7 p.ti)* Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ la quantità

$$L_\alpha := \lim_{x \to +\infty} \int_{x^3}^{\sqrt{x^6+\alpha x}} \sqrt[3]{t^2 + 2t}\, dt$$

4A] *(8 p.ti)* Sia F la funzione reale di variabile reale definita come

$$F(x) := \int_1^{\log(1+x)} \frac{\log t}{\sin(\pi t)}\, dt$$

i) Determinarne il dominio $I \subseteq \mathbb{R}$, i limiti agli estremi di I, l'insieme di derivabilità, gli intervalli di monotonia, e gli eventuali estremanti. Tracciarne un grafico qualitativo.

ii) Determinare l'unica soluzione x_0 dell'equazione $F(x) = 0$, e scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto $(x_0, 0)$.

iii) (Facoltativo) Discutere la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^{e-1} F(x)\, dx$.

Suggerimento per il punto iii): può essere utile porre $g(x,t) = |\log t| / |\sin(\pi t)|$ e studiare la convergenza di $\iint g(x,t)\, dxdt$ esteso ad un'opportuna regione di $\mathbb{R}^2$.

In alternativa, cercare uno sviluppo asintotico per $F(x)$ quando $x \to 0^+$.