

## Analisi Matematica 4

Elenco degli argomenti trattati.

**Spazi di Hilbert:** proprietà elementari, ortogonalità, proiezioni, sistemi ortonormali, massimalità e completezza, il teorema di Riesz-Fischer.

**Lo spazio  $L^2([-\pi, \pi])$ :** i sistemi trigonometrici reale e complesso, le serie di Fourier, convergenza puntuale, teorema di Dirichlet.

**Funzioni armoniche in  $\mathbb{R}^2$ :** relazioni con le funzioni olomorfe, regolarità, proprietà del valor medio, principio di massimo; equazione di Laplace ( $\Delta u=0$ ) e problema di Dirichlet omogeneo, nucleo e integrale di Poisson per il disco.

**Funzioni armoniche in  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 3$ :** proprietà del valor medio, regolarità, equazione di Poisson ( $\Delta u=f$ ) e problema di Dirichlet; relazioni integrali (formule di Green e Gauss, teorema della divergenza); convoluzioni e mollificatori; la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace; utilizzo della funzione di Green per la soluzione del problema di Dirichlet; la funzione di Green per la sfera e per il semispazio; il principio di minima energia; funzioni sub-armoniche e il metodo di Perron.

**L'equazione del calore:** costruzione della soluzione fondamentale; risoluzione del problema di Cauchy. Passeggiata casuale 1-dimensionale: dal caso discreto al moto browniano. Passeggiata casuale D-dimensionale: ricorrenza, transienza, teorema di Polya.

**Trasformata di Fourier:** funzioni a decrescenza rapida, lo spazio di Schwartz  $S$  e la sua topologia; la trasformata di Fourier e le sue proprietà elementari; teorema di inversione in  $S$ . Definizione, proprietà e inversione della trasformata di Fourier in  $L^1(\mathbb{R}^m)$ . Teoria  $L^2$ : il teorema di Plancherel. Distribuzioni temperate, esempi, operazioni.

Alcuni testi consultati:

A.Friedman, *Foundations of modern analysis*, Holt, Rinehart & Winston.

D.Gilbarg e N.S.Trudinger, *Elliptic PDE's of second order*, Springer.

Y.Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover.

T. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge Univ. Press.

W.Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill.

S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali*, Springer.

E.M.Stein e R.Shakarchi, *Fourier analysis: an introduction*, Princeton Univ. Press.