LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica** - MarcoVignati

## Calcolo differenziale #1

Questo file contiene i testi di alcuni problemi proposti in aula, oppure assegnati come prova d'esame.
Fornisco anche tracce di possibili soluzioni (sperabilmente senza, o quasi, errori).

**1] Sia** $\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\neq 0\right\}$, **e sia** $f:\Omega\to\mathbb{R}$ **definita come**

$$f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{8}{x}-y$$

**Individuare i punti stazionari di** $f$ **in** $\Omega$, **e classificarne la natura (max, min, sella).**

**Sol.:** la funzione $f$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nell'aperto $\Omega$ (il piano privato degli assi coordinati); i punti stazionari sono quelli in cui si annulla il gradiente di $f$, cioè:

$$(0,0)=\nabla f(x,y)=\left(\frac{1}{y}-\frac{8}{x^2};-1-\frac{x}{y^2}\right)$$

da cui $\left\{\begin{array}{l} x^2=8y \\ x=-y^2 \end{array}\right.$ , $\left\{\begin{array}{l} y^4=8y \\ x=-y^2 \end{array}\right.$ , $y=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{non acc.} \\ 2 & \end{array}\right.$ .
Quindi l'unico punto stazionario di $f$ in $\Omega$ è $P=(-4,2)$.

Calcolando le derivate seconde

$$\mathbf{H}f(x,y)=\left[\begin{array}{cc} 16/x^3 & -1/y^2 \\ -1/y^2 & 2x/y^3 \end{array}\right];\ \mathbf{H}f(-4,2)=\left[\begin{array}{cc} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1 \end{array}\right]$$

Poiché

$$\det\mathbf{H}f(-4,2)=3/16>0 \ \text{ e } \ \partial_{xx}f(-4,2)=-1/4<0$$

deduciamo che $P$ è un punto di max locale per $f$.

**2] Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite come**

$$(u, v) = \mathbf{f}(x, y, z) := \left(x + 2y^2 + 3z^3 \; ; \; 2y - x^2\right) ,$$

$$(\alpha, \beta) = \mathbf{g}(u, v) := \left(e^{u+2v} \; ; \; v\right)$$

**e sia $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la loro funzione composta.**

**Calcolare $\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}(1, -1, 1)$, motivando la risposta.**

**Sol.:** le funzioni **f** e **g** sono infinitamente derivabili nei loro rispettivi domini, e quindi lo stesso vale per **h**.

Allora

$$\mathbf{Jf}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 4y & 9z^2 \\ -2x & 2 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{Jg}(u, v) = \begin{bmatrix} e^{u+2v} & 2e^{u+2v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, dalla formula di differenziazione delle funzioni composte,

$$\mathbf{Jh}((x, y, z)) = \mathbf{Jg}(u, v)\ \mathbf{Jf}(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^{u+2v}(1 - 4x) & 4e^{u+2v}(y + 1) & 9z^2 e^{u+2v} \\ -2x & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando questa formula ai punti $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 1)$ e $(u_0, v_0) = \mathbf{f}(1, -1, 1) = (6, -3)$ si ottiene

$$\mathbf{Jh}(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}(1, -1, 1) = 9$.

**p.s.:** abbiamo ricavato la forma esplicita di tutte le derivate parziali contenute in **Jh**. In alternativa, per rispondere alla sola domanda posta nel quesito:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial z}$$