LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica**

21 gennaio 2019 **prova scritta #1** prof. M.Vignati

1] Siano $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili in $t = 2$, con sviluppi di Taylor

$$x(t) = 3 - t + o(t-2) \quad \text{e} \quad y(t) = 3t - 8 + o(t-2)$$

Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(1, -2)$, con $G(1, -2) = 3$ e $\nabla G(1, -2) = (1\,; -3)$.
Scrivere lo sviluppo di Taylor in $t = 2$, arrestato al I ordine, per la funzione

$$f(t) = \left(1 + t^2\right) G(x(t), y(t)) \ .$$

2] Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ la soluzione di $F(0, y) = 0$, dove

$$F(x, y) = x^2 y + 3 + \ln(1 + xy) - e^{x+y}$$

i) Verificare che, localmente in $(0, y_0)$, l'insieme $Z = \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ può essere descritto come grafico di un'unica funzione $y = g(x)$.

ii) Ricavare l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(0, y_0)$.

3] Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il trapezio di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ e $(1,1)$, e sia $(\partial T)^+$ la sua frontiera, percorsa in senso anti-orario.
Per $b \in \mathbb{R}$ sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(x^2 - xy + by^2\,;\, y^2 + xy - 3x^2\right)$$

Per quali valori $b \in \mathbb{R}$ accade che il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo $(\partial T)^+$ coincide con il flusso di $\mathbf{F}$ uscente da T?

4] Sia consideri il campo vettoriale $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(x^2 y + z^2\,;\, xy - z^2\,;\, 2z(x - y)\right)$$

e la superficie

$$\Sigma^+ = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq \sqrt{3}/2\right\}$$

orientata *verso l'alto* (cioè in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva).

i) Discutere la conservatività del campo $\mathbf{G}$ in $\mathbb{R}^3$.

ii) Calcolare $\boldsymbol{\Phi}(rot\mathbf{G}; \Sigma^+)$ (il flusso del campo vettoriale $rot\mathbf{G}$ attraverso Σ^+).

5] **i)** Determinare la soluzione generale $y(t)$ dell'equazione differenziale

$$(*) \qquad y'' - 2y' - 3y = 1 - 3t$$

ii) Per quali valori $p \in \mathbb{R}$ la relazione

$$(\clubsuit) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{e^{pt}} = 0$$

è soddisfatta da <u>tutte</u> le soluzione di $(*)$?

iii) (Facoltativo) Per quali valori $p \in \mathbb{R}$ <u>nessuna</u> soluzione di $(*)$ soddisfa $(\clubsuit)$?