Cognome...Nome...............................Matr...................

LM in Chimica (F5Y) - **Metodi matematici applicati alla Chimica**

12 febbraio 2020 $\boxed{\textbf{prova scritta \#2}}$ prof. M.Vignati

1] **i)** Determinare la soluzione locale $y(t)$ dell'equazione differenziale (di Bernoulli)

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{2}{t^2}y^2 \qquad (t > 0)$$

che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 1$.

ii) Qual è il più ampio intervallo in cui è definita?

2] Siano $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ e $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$.

i) Determinare l'unica funzione $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, che soddisfa $g(1) = 2$ e che rende conservativo in Ω il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(xy - g(y) \,;\, y + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{g(y)} \right)$$

ii) Per questa scelta di g, determinare il potenziale U del campo $\mathbf{F}$ che soddisfa $U(0, 1) = 1$.

iii) Calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo l'arco parabolico di equazione $\{y = 1 + 6x - x^2\}$, percorso dal punto $\mathbf{a} = (0, 1)$ al punto $\mathbf{b} = (4, 9)$.

3] Calcolare il lavoro $\displaystyle\oint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{p}$ compiuto dal campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(1 + 4x + y^2 - xy^2 \;;\; 3 - x + ye^x\big)$$

percorrendo, in senso anti-orario, la frontiera dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le 3 \,;\, |y| \le 3 + 2x - x^2\}$$

4] Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0 \,;\, y \ge 0 \,;\, x + y^2 \le 9\}$, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = y\,\sqrt{x}\,\sqrt{9 - x - y^2}$$

i) Determinare i punti stazionari di f <u>interni</u> a D, e classificarne la natura (max rel. / min. rel. / sella).

ii) Determinare i valori estremi assoluti assunti da f in D.

5] Sia $E = \{(x, y, z) : 0 \le z \le 3(1 - x^2 - y^2)\}$, e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F}\,(x, y, z) := \big(y(x + 1);\, x(y - 1);\, x^2 + z\big)$$

i) Calcolare il flusso $\Phi(\mathbf{F}; (\partial E)^+)$ del campo $\mathbf{F}$ <u>uscente</u> da E.

ii) Calcolare il flusso $\Phi(\mathbf{F}; \Sigma^+)$, dove Σ^+ è la parte di ∂E che si trova al di sopra del piano $\{z = 0\}$, ed è orientata "verso l'alto" (cioè con il versore normale $\mathbf{n}$ che soddisfa $n_3 > 0$).