

Nome/Cognome . . . . . Matricola : . . . . .

(Motivare le proprie risposte, in caso contrario l'esercizio non verrà valutato)

(1) Si consideri la seguente formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq w_1 f(x_1) + w_2 f(0) + w_3 f(x_3)$$

con  $x_1, x_3 \in (-1, 1)$ . Determinare i parametri  $w_1, w_2, w_3, x_1, x_3$  in modo tale che abbia ordine polinomiale massimo (attenzione un nodo è assegnato in  $x = 0$ ).

(2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \epsilon \\ 1 - \epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

e sia assegnata una aritmetica floating point. Per quali valori di  $\epsilon$  il determinante è numericamente nullo? Come risulta la fattorizzazione  $LU$  della matrice  $A$ ? Per quali valori del parametro  $\epsilon$  il fattore  $U$  è singolare in aritmetica floating point?

(3) Proporre due metodi numerici per trovare una intersezione dei grafici delle funzioni  $f_1(x) = x^2$  e  $f_2(x) = 4 \sin(x)$ . Discutere le principali proprietà dei metodi proposti (convergenza, ordine del metodo, eventuale ricerca del punto iniziale,...).

(4) La seguente funzione

$$S_3(x) = \begin{cases} 1 + \frac{11}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^3 & x \in [1, 2) \\ 4 + \frac{7}{2}(x-2) + \frac{3}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

è una spline cubica nell'intervallo  $[1, 3]$  per la suddivisione  $\{1, 2, 3\}$ ? In caso affermativo, è una spline naturale? Siano  $x_i = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$  e  $y_i = S_3(x_i)$ , determinare la spline lineare interpolante nei punti  $(x_i, y_i)$ .