

Nome/Cognome Matricola :
(Motivare le proprie risposte, in caso contrario l'esercizio non verrà valutato)

- (1) Costruire una formula di quadratura numerica del tipo

$$I(f) = \int_{-1}^1 g(x)dx \approx A_0 f(-1/2) + A_1 f(1/2)$$

in modo tale che abbia ordine massimo. È una formula di tipo Gaussiano? Cercare una stima dell'errore e confrontare la formula ottenuta con altre formule a due nodi.

- (2) Analizzare il problema della ricerca della migliore approssimazione con una costante c , della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. In altri termini: determinare la costante c che realizzi il minimo scarto tra $|f(x) - c|$ con $x \in [0, 1]$,

$$\min_c \max_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - c|.$$

(Suggerimento: la costante c dovrà essere compresa tra 0 ed 1, quindi $c \in [0, 1]$. Prima si valuti il massimo valore di $|\sqrt{x} - c|$ al variare di x in $[0, 1]$ poi si valuti la migliore costante c).

Scrivere un M-file MATLAB che ritorni i valori

$$\max_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - c_k|$$

per alcuni valori c_k (a scelta dell'utente o determinati automaticamente nell'M-file) e per una suddivisione dell'intervallo $[0, 1]$.

- (3) L'equazione $e^x - 4x^2 = 0$ ha una radice compresa nell'intervallo $[4, 5]$. Stabilire come si comporta la seguente iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} e^{(x_k/2)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

per l'approssimazione di tale radice. Fornire un metodo iterativo alternativo a quello proposto.

- (4) Una matrice reale A di ordine N , simmetrica e definita positiva ($\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > \mathbf{0}$, per ogni vettore non nullo \mathbf{x}) si può fattorizzare come

$$A = LDL^T$$

con L matrice triangolare inferiore con elementi uguali ad uno sulla diagonale principale, L^T è la matrice trasposta di L , D è una matrice diagonale. Descrivere un algoritmo per il calcolo di tale fattorizzazione (quindi per determinare gli elementi delle matrici L e D). Quante operazioni si effettuano? Che passi occorre compiere per utilizzare la fattorizzazione nella soluzione del sistema lineare $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$?