

Calcolo Numerico I - Esercizi per II prova intermedia

1. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e la si utilizzi per risolvere numericamente il problema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(*Facoltativo: cambiava la fattorizzazione nel caso di pivoting parziale*).

2. Trovare una spline quadratica interpolante S_2 i punti

$$(0, 1), (1, 2), (4, 0)$$

tale che $S_2'(0) = 1$. La spline cercata è unica?

3. Costruire una formula di quadratura numerica del tipo

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

in modo tale che abbia ordine due. È una formula di tipo Gaussiano? Confrontare la formula ottenuta con altre formule a tre nodi.

4. Analizzare l'interpolazione cubica a tratti di Hermite (esistenza, costruzione, eventuale stima dell'errore, ...). Siano quindi assegnati i nodi x_0, x_1, \dots, x_N ed i valori $f_i = f(x_i)$, $f'(x_i) = s_i$, $i = 0, \dots, N$ per una data funzione $f(x)$. La funzione interpolante è una funzione polinomiale a tratti, ogni "tratto" è un polinomio di terzo grado $P_i(x)$, $i = 1, \dots, N$, tale che

$$P_i(x_i) = f_i, P_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, P_i'(x_i) = s_i, P_i'(x_{i-1}) = s_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

5. Una spline cubica naturale S su $[0, 2]$ è definita da

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ s_1(x) = 1 + (x-2) - (x-2)^3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

calcolare a, b, c, d .

6. Impostare il problema della ricerca della funzione $g(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ che approssima i punti (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$ nel senso dei minimi quadrati.

7. Si utilizzi la spline lineare $S_1(x)$ interpolante nei nodi

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 3,$$

la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ per approssimare l'integrale

$$\int_0^3 e^{-x^2} dx,$$

e stimare l'errore commesso.

8. Trovare la fattorizzare LU la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

ed utilizzare questa fattorizzazione per il calcolo della matrice inversa A^{-1} .

9. Scrivere una funzione MATLAB per il calcolo dell'area della regione limitata compresa tra i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = e^{-x^2}, \quad f_2(x) = x^2.$$

(Osservazione: occorre prima trovare l'intersezione tra i grafici di queste funzioni).

10. Trovare la costante C che renda minimo l'errore

$$E = \max_{x \in [0,1]} |e^{-x} - C|.$$

11. Sia f una funzione integrabile, studiare il problema della ricerca della costante C ottimale che minimizzi la quantità

$$\int_a^b |f(x) - C|^2 dx.$$