Calcolo Numerico I - prova scritta - 18 Giugno 2003

(Traccia di soluzione)

1. L'equazione proposta è equivalente a $\sin(x) = x/2$, dall'analisi dei grafici delle funzioni $y_1 = \sin(x)$ e $y_2 = x/2$, si veda Figura 1, si deduce che la radice $r \in [\pi/2,\ \pi]$. La funzione $f(x) = \sin(x) - x/2$ è continua, inoltre $f(\pi/2) >$

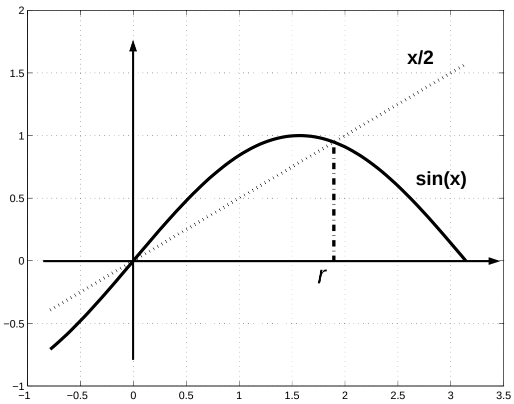

FIGURE 1. Confronto tra grafici, Esercizio 1. es1-1

$0,\ f(\pi) < 0$, potremmo applicare il metodo di bisezione. Consideriamo invece il metodo di Newton (del secondo ordine nel caso di convergenza essendo la radice semplice). Abbiamo

$$f'(x) = \cos(x) \; - \; 1/2 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0 \;\forall x \in [\pi/2,\ \pi].$$

Inoltre $f''(x) = -\sin(x)$ e quindi, $f''(x) \leq 0$, per $x \in [\pi/2,\ \pi]$. L'iterazione del metodo di Newton si scrive come

$$x_{k+1} = x_k \; - \; \frac{\sin(x_k) \; - \; x_k/2}{\cos(x_k) \; - \; 1/2},\ x_0 \ \texttt{assegnato}.$$

Nell'intervallo considerato la funzione è strettamente decrescente e concava, inoltre si verifica facilmente che

$$\left|\frac{f(\pi/2)}{f'(\pi/2)}\right| \leq (\pi - \pi/2) = \pi/2,\ \left|\frac{f(\pi)}{f'(\pi)}\right| \leq \pi/2$$

e quindi il metodo di Newton converge per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in [\pi/2,\ \pi]$ e la convergenza è quadratica (*Osservazione: teorema di convergenza citato a lezione*).

2. Basta scegliere un'opportuna forma del polinomio di interpolazione (interpolazione di Hermite), per esempio nella forma di Newton (essendoci quattro condizioni si utilizzerà un polinomio in $\mathbb{P}_3$),

$$p(x) = A + B\ x + C\ x^2 + d\ x^2\ (x-2).$$

Imponendo le condizioni si ottiene (*si veda il paragrafo sull'interpolazione di Hermite nel testo*),

$$p(0) = 0 \ \Rightarrow\ A = 0,$$

$$p'(0) = 1 \ \Rightarrow\ B = 0,$$
$$p(2) = 1 \ \Rightarrow\ C = -1/4,$$

$$p'(2) = 0 \ \Rightarrow\ D = 0,$$

quindi

$$p(x) = x - \frac{1}{4}x^2,$$

e il polinomio risulta di secondo grado.
Generalizzando la costruzione fatta segue che esiste sempre ed è unico il polinomio p con valori $p(0),\ p(2),\ p'(0),\ p'(2)$ assegnati.
3. In Figura 2 si mostra il grafico delle funzioni $y_1 = \sin(x)$, e $y_2 = C$, per $x \in [0, \pi]$ insieme al grafico della funzione errore $E = |\sin(x) - C|$. Evidentemente il valore C ottimale va cercato nell'intervallo $[0, 1]$ (insieme

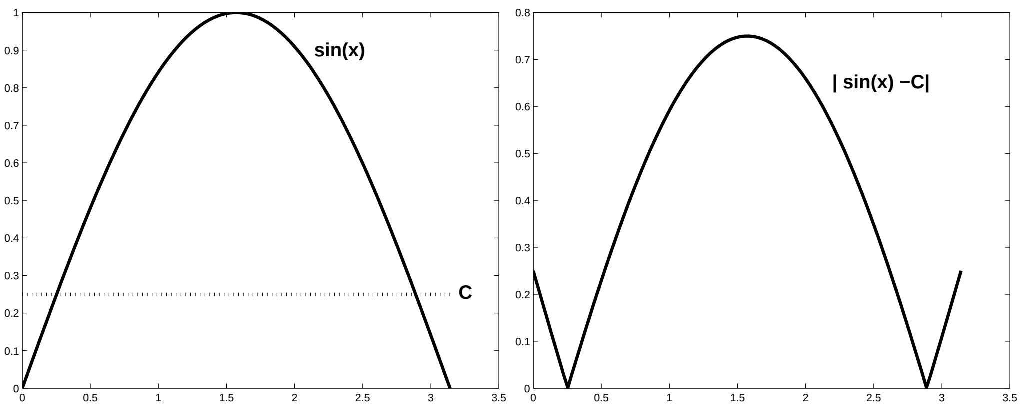

FIGURE 2. Grafici della funzione da approssimare e della funzione errore, Esercizio 2.

es2

immagine della funzione seno). Abbiamo quindi che (dallo studio della funzione E), il massimo valore è assunto in uno dei due bordi $x = 0,\ \pi$ oppure nel punto stazionario di E, $x = \pi/2$,

$$E(C) = \max(\ |1 - C|,\ |C|\ ),\ C \in [0, 1].$$

Il minimo di $E(C)$ è quindi per

$$1 - C \; = \; C \;\Rightarrow\; C = 1/2.$$

Nel caso discreto in cui si hanno i valori $y_i = \sin(x_i)$, $i = 1, ..., N$, si tratta del problema del fitting in norma discreta del massimo, $\|\cdot\|_\infty$.

4. Imponendo le condizioni di regolarità nel punto interno $x = 1$ e le condizioni al bordo $S''(0) = S''(2) = 0$ e da

$$S'(x) = \begin{cases} 2 - 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ b + 2c\,(x-1) + 3d\,(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} -6x & 0 \le x \le 1 \\ 2c + 6d\,(x-1) & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

si ottiene, $a = 2,\; b = -1,\; c = -6,\; d = 2.$

5. Scegliamo l'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$,

$$\frac{b-a}{2} = 1,\;\; x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\;\; x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Abbiamo,

l	x^l	`formula`	$\int_{-1}^{1} x^l dx$	`confronto`
0	1	2	2	$=$
1	x	0	0	$=$
2	x^2	2/3	2/3	$=$
3	x^3	0	0	$=$
4	x^4	2/9	2/5	$\neq$

e quindi l'ordine polinomiale è 3. Per la formula composita basta applicare la formula per l'intervallo $[a, a+h]$ (con $h = (b-a)/m$),

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \;\simeq\; \frac{h}{2}\Big[f\left(a + \frac{h}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right) \;+\; f\left(a + \frac{h}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)\Big].$$

Per gli altri sottointervalli basta sommare un multiplo di h per la posizione dei nodi.

```
function int=GL2comp(a,b,m,fun)

    h=(b-a)/m; %%% passo costante

    c1=h*(1-sqrt(1/3))/2;  %% primi due nodi
    c2=h*(1+sqrt(1/3))/2;  %%
```

```
x1=a+c1+h*(0:m-1);  %% nodi in tutti i
x2=a+c2+h*(0:m-1);  %% sottointervalli

f1=feval(fun,x1);   %% valuto la funzione
f2=feval(fun,x2);

int=h*(sum(f1)+sum(f2))/2.; %% somma finale
```