(Traccia di soluzione)

(1) Costruire una formula di quadratura numerica del tipo

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \;\approx\; A_0 f(-1) + A_1 f(1)$$

in modo tale che abbia ordine massimo. Abbiamo, costruiamo un sistema 2×2 avendo due parametri,

$$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = A_0 + A_1$$

$$\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 = -A_0 + A_1$$

da cui $A_0 = A_1 = 1$. Verifichiamo ulteriori monomi per il grado polinomiali

$$\int_{-1}^{1} x^2\, dx \;=\; 2/3 \;\; \texttt{(formula quadratura,} = 2)$$

quindi il grado polinomiale è 1. Non è quindi una formula di tipo Gaussiano, altre formule a due nodi: formula dei trapezi (con il medesimo ordine), formula Gaussiana a due nodi (ordine polinomiale 3). Per la formula proposta la forma dell'errore

$$E = C\frac{f''(\eta)}{2}$$

con C costante.
Dall'analisi svolta a lezione (essendo il prodotto $(x+1)(x-1) \le 0$),

$$C = \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)\, dx \;=\; -4/3.$$

(2) Per la funzione $f(x) = 3/2\, x^2 - e^{-(x-1)^2}$ abbiamo (si veda Figura 1 per un confronto approssimato delle due funzioni coinvolte) abbiamo $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. La radice è semplice

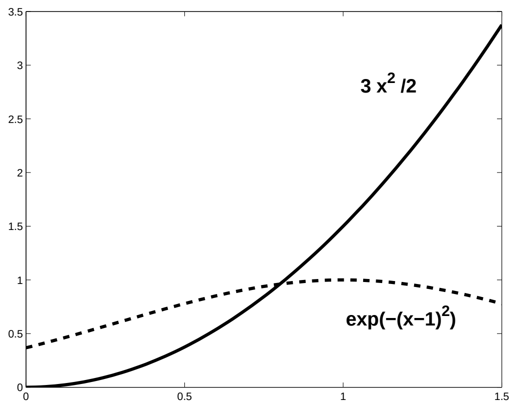

FIGURE 1. Grafici della funzioni che compongono la f, Esercizio 2. `es2`

(basta analizzare la derivata prima f' e la derivata seconda f''), data la regolarità applichiamo il metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k \;-\; \frac{\frac{3}{2}x_k^2 - e^{-(x_k-1)^2}}{3x_k + 2(x_k-1)e^{-(x_k-1)^2}}, \quad x_0 \; \texttt{assegnato}.$$

Il metodo è localmente convergente.

(3) La stima dell'errore è (*si veda la dimostrazione fatta a lezione o il testo*)

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2$$

dove S_1 è la funzione spline lineare interpolante, $M_2 = \max |f''(x)|$ con $x \in [0, 1]$, h è la lunghezza $h = 1/N$. Abbiamo,

$$f''(x) = \frac{32}{(1+4x)^3}, \ x \in [0, 1]$$

da cui una stima per $M_2 = 32$. Per avere una accuratezza uniforme $\leq 10^{-3}$ si ha

$$\frac{32}{8} h^2 \leq 10^{-3} \ \Rightarrow \ h \leq \frac{\sqrt{10^{-3}}}{2}.$$

Il fenomeno di Runge non può accadere.

(4) La matrice è una matrice triangolare la cui inversa (che esiste perchè il determinante è diverso da zero) è ancora una matrice triangolare dello stesso tipo. Sia $A^{-1} = B = (b_{ij})$, imponendo il fatto che B sia triangolare superiore, si ottiene

$$b_{ij} = 0, \ \ i > j; \ b_{ii} = 1; \ \ b_{ij} = -4\, b_{i+1,j}, \ i = j-1, ..., 2, 1.$$

Facoltativo: Utilizzando la norma infinito, per esempio, abbiamo

$$\|A\|_\infty = 5, \quad \|B\|_\infty = \sum_{k=0}^{n-1} 4^k \ \Rightarrow \ \mu_\infty = 5 \sum_{k=0}^{n-1} 4^k.$$